



# ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	113 Прикладна математика
Освітня програма	Математичні методи моделювання, розпізнавання образів та безпеки даних
Статус дисципліни	Вибіркова
Форма навчання	очна(денна)
Рік підготовки, семестр	4 курс, осінній семестр
Обсяг дисципліни	4 кредити / 120 годин Лекційних занять: 18 год. Практичних занять: 18 год. Самостійна робота студентів: 84 год.
Семестровий контроль/ контрольні заходи	МКР, ДКР
Розклад занять	<a href="http://rozklad.kpi.ua">http://rozklad.kpi.ua</a>
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: к.ф.-м.н., ст. викл. Рябов Георгій Валентинович (ryabov.george@gmail.com) Практика: к.ф.-м.н., ст. викл. Рябов Георгій Валентинович (ryabov.george@gmail.com)
Розміщення курсу	Google Classroom

### Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Теорія випадкових процесів вивчає ймовірнісні закономірності поведінки об'єктів, які мають стохастичну природу, або знаходяться у випадковому середовищі. Необхідність вивчати такі об'єкти природним чином виникає в задачах захисту інформації, розпізнаванні образів, квантової фізики, фінансової математики тощо.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають продемонструвати такі результати навчання:

1) *Знання*: основних типів випадкових процесів та різні типи їх перетворень, теорем про властивості реалізацій випадкових процесів та їх асимптотичну поведінку.

2) *Уміння*: обчислювати кількісні характеристики випадкових процесів, досліджувати властивості реалізацій випадкових процесів.

3) *Досвід*: застосування математичного апарату теорії випадкових процесів до вивчення моделей випадкових явищ, які зустрічаються в прикладних задачах.

### **Загальні компетентності**

ЗК 2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК 5 Здатність проведення досліджень на відповідному рівні.

ЗК 6 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК 8 Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

### **Фахові компетентності спеціальності**

ФК 1 Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.

ФК 2 Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.

ФК 13 Здатність зрозуміти постановку завдання, сформульовану мовою певної предметної галузі, здійснювати пошук та збір необхідних вихідних даних.

### **Програмні результати навчання**

РН 1 Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці.

РН 2 Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.

РН 14 Виявляти здатність до самонавчання та продовження професійного розвитку

РН 15 Уміти організувати власну діяльність та одержувати результат у рамках обмеженого часу.

### **2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

Для засвоєння матеріалу курсу «Випадкові процеси» студент повинен вільно володіти поняттями та методами, викладеними в курсах теорії ймовірностей, математичного аналізу, лінійної алгебри. Бажано також володіти методами функціонального аналізу.

Дисципліна забезпечує кредитні модулі: “Математичні моделі фізики” та “Системний аналіз”.

### **3. Зміст навчальної дисципліни**

#### **Розділ 1. Випадкові процеси, характеристики розподілів випадкових процесів.**

Тема 1.1. Основні характеристики розподілів випадкових процесів.

Тема 1.2. Теорема Колмогорова про існування випадкового процесу.

Тема 1.3. Гаусівські процеси.

Тема 1.4. Регулярність траєкторій випадкового процесу.

#### **Розділ 2. L2 теорія.**

Тема 2.1. Стаціонарні випадкові процеси.

Тема 2.2. Спектральне зображення стаціонарного процесу.

Тема 2.3. Сингулярні та регулярні стаціонарні послідовності.

Тема 2.4. Задача прогнозу для стаціонарних послідовностей.

### Розділ 3. Ланцюги Маркова.

Тема 3.1. Класифікація станів ланцюга Маркова.

Тема 3.2. Інваріантний розподіл ланцюга Маркова.

Тема 3.3. Ергодичні теореми.

## 4. Навчальні матеріали та ресурси

### Базова рекомендована література

1. *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів. - К.: Либідь, 1990. - 167 с.  
<https://classroom.google.com/c/NDYxODM3MzMwMjQ4?cjc=5j5ox7t>
2. *Слейко Я.І., Копитко Б.І., Триш Б.М.* Теорія ймовірностей. Теореми, приклади і задачі. - Л.: ЛНУ імені Івана Франка, 2009. - 391 с.  
<https://classroom.google.com/c/NDYxODM3MzMwMjQ4?cjc=5j5ox7t>
3. *Дороговцев А.А., Ніщенко І.І.* Випадкові процеси: збірник задач до проведення практичних занять для студентів напрямку підготовки 6.040301 “Прикладна математика”. - К.: НТУУ “КПІ”, 2012. - 84 с.  
<https://classroom.google.com/c/NDYxODM3MzMwMjQ4?cjc=5j5ox7t>

### Допоміжна рекомендована література

1. *D. Gusak, A. Kukush, A. Kulik, Yu. Mishura, A. Pilipenko.* Theory of Stochastic Processes. With Applications to Financial Mathematics and Risk Theory. - Springer, 2010. - 375 pp.  
<https://classroom.google.com/c/NDYxODM3MzMwMjQ4?cjc=5j5ox7t>
2. *A. Shiryayev.* Probability-1. - Springer, 2016. - 486 pp.  
<https://classroom.google.com/c/NDYxODM3MzMwMjQ4?cjc=5j5ox7t>
3. *A. Shiryayev.* Probability-2. - Springer, 2019. - 348 pp.  
<https://classroom.google.com/c/NDYxODM3MzMwMjQ4?cjc=5j5ox7t>
4. *A. Shiryayev.* Problems in Probability. - Springer, 2012. - 427 pp.  
<https://classroom.google.com/c/NDYxODM3MzMwMjQ4?cjc=5j5ox7t>
5. *R. Durrett.* Probability. Theory and Examples. - Cambridge University Press, 2010. - 428 pp.  
<https://classroom.google.com/c/NDYxODM3MzMwMjQ4?cjc=5j5ox7t>

## Навчальний контент

### 5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

#### Лекційні заняття

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	<b>Характеристики випадкових процесів.</b> Визначення випадкового процесу. Приклади. Функція математичного сподівання та коваріаційна функцій. Невід’ємна визначеність коваріаційної функції. Скінченновимірні розподіли. Узгодженість скінченновимірних розподілів. Теорема Колмогорова про існування випадкового процесу. Процес Пуассона та його скінченновимірні розподіли. [1, §1-2]
2	<b>Процес Пуассона. Гауссівські процеси.</b> Процес Вінера та його скінченновимірні розподіли. Узгодженість скінченновимірних розподілів в термінах характеристичних функцій. Гауссівські процеси. Існування гауссівського процесу із заданими функцією математичного сподівання та коваріаційною функцією. Коваріаційна функція як скалярний добуток в гільбертовому просторі.

	[1, §1-2]
3	<b>Модифікації випадкових процесів.</b> Регулярність випадкового процесу як функції від параметру. Визначення модифікації випадкового процесу. Вимірні процеси та їх властивості. Стохастично неперервні процеси. Вимірні модифікації стохастично неперервного процесу. Необхідна і достатня умова існування неперервної модифікації. Достатня умова Колмогорова існування неперервної модифікації. [1, §8]
4	<b>L2 теорія. Стаціонарність.</b> Неперервні, диференційовні, інтегровні в середньо квадратичному випадкові процеси. Необхідні і достатні умови неперервності та неперервної диференційовності в термінах функції математичного сподівання і коваріаційної функції. Інтегрування неперервних в середньому квадратичному процесів. Стаціонарність у вузькому та широкому сенсах. Стаціонарність гауссівських процесів. [1, §14]
5	<b>Спектральні міри стаціонарних процесів.</b> Теореми Бохнера та Герглотца. Спектральна міра та спектральна щільність стаціонарних в широкому сенсі процесів. Достатня умова існування спектральної щільності. Процеси з ортогональними приростами і їх структурні міри. [1, §16]
6	<b>Стохастичні інтеграли.</b> Стохастичний інтеграл відносно процесу з ортогональними приростами. Представлення стаціонарних процесів та послідовностей як стохастичних інтегралів по процесам з ортогональними приростами. Обчислення спектральних мір при перетвореннях стаціонарних процесів та послідовностей. Закон великих чисел для стаціонарної послідовності. [1, §15]
7	<b>Задача прогнозу.</b> Простори лінійних оцінок. Регулярні та сингулярні послідовності. Оновлюючий білий шум для регулярної послідовності. Розклад Вольда. Критерій регулярності Колмогорова для послідовностей зі спектральною щільністю. Формула Колмогорова-Сегьо. [1, §17-18]
8	<b>Ланцюги Маркова.</b> Еквівалентні визначення ланцюга Маркова. Скінченновимірні розподіли ланцюгів Маркова. Стохастичні матриці. Суттєві і несуттєві стани. Стани, що сполучаються. Період стану. Рекурентні і нерекурентні стани. Критерій рекурентності. Інваріантні розподіли. [2, §3.2]
9	<b>Ергодичність ланцюгів Маркова.</b> Збіжність перехідних ймовірностей в сенсі Абеля. Додатні і нульові стани. Умова існування та єдиності інваріантного розподілу. Збіжність перехідних ймовірностей до інваріантного розподілу для аперіодичного класу станів, що сполучаються. [2, §3.2]

### Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань
1	<b>Характеристики випадкового процесу.</b> Обчислення функцій математичного сподівання та коваріаційної функції процесу. Знаходження скінченновимірних розподілів. [3, Заняття 2]

2	<b>Процес Пуассона.</b> Скінченновимірні розподіли процесу Пуассона. Умовні розподіли, пов'язані з процесом Пуассона. [3, Заняття 3]
3	<b>Гауссівські процеси.</b> Властивості коваріаційних функцій. Скінченновимірні розподіли гауссівських процесів. Теорема про нормальну кореляцію. Вінерівський процес та його перетворення. Гауссівські процеси, пов'язані з процесом Вінера. [3, Заняття 3-5]
4	<b>Стохастична неперервність. L2 теорія.</b> Властивості стохастично неперервних процесів. Існування неперервної модифікації випадкового процесу. Дослідження диференційовності та інтегровності в середньому квадратичному. [3, Заняття 6-7]
5	<b>Стаціонарні процеси.</b> Перевірка стаціонарності процесу. Спектральні міри стаціонарних процесів та послідовностей. [3, Заняття 8, 11]
6	<b>Спектральні зображення стаціонарних процесів.</b> Процеси з ортогональними приростами. Стохастичні інтеграли. Обчислення спектральних мір при лінійних перетвореннях стаціонарних процесів. [3, Заняття 9, 10]
7	<b>Регулярні та сингулярні стаціонарні послідовності.</b> Перевірка регулярності стаціонарної послідовності. Знаходження онослюючого білого шуму. Перевірка сингулярності стаціонарної послідовності. Застосування критерія Колмогорова. [3, Заняття 12]
8	<b>Задача прогнозу.</b> Знаходження розкладу Вольда. Розв'язок задачі прогнозу для стаціонарної послідовності. [3, Заняття 13]
9	<b>Ланцюги Маркова.</b> Перевірка марківської властивості. Суттєві та несуттєві стани. Обчислення інваріантного розподілу ланцюга Маркова. Рекурентні та нерекурентні стани. [3, Заняття 14-16]

## 6. Самостійна робота студента/аспіранта

Студент повинен завчасно готуватись до лекцій та практичних занять. Перед лекціями необхідно повторити теоретичний матеріал, наданий у попередніх лекціях. Перед практичними заняттями необхідно повторити відповідний теоретичний матеріал.

Обов'язковим є виконання домашніх завдань, які необхідно виконувати до наступного практичного заняття. Виконання та ревізія виконаних домашніх завдань також необхідні для підготовки до модульних контрольних робіт. В кожному домашньому завданні студентам пропонується розв'язати набір типових задач з теми відповідного практичного заняття. При розв'язанні задач необхідно обґрунтовувати кожний крок розв'язання, спираючись на теоретичні положення курсу. У випадку застосування тієї чи іншої теореми необхідно ретельно перевірити виконання всіх умов теореми. Якщо наведений розв'язок не задовольняє цим вимогам, задача вважається не виконаною. При несвоєчасному поданні роботи бали за неї зменшуються вдвічі.

### 7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

#### Відвідування занять

Відвідування лекцій та практичних занять, а також відсутність на них, не оцінюється. Однак, студентам рекомендується відвідувати заняття, оскільки на них викладається теоретичний матеріал та розвиваються навички, необхідні для виконання домашніх завдань та успішного написання МКР. В разі великої кількості пропусків студент може бути не допущений до екзамену, якщо не встигне виконати навчальний план по домашніх завданнях та МКР.

#### Пропущені контрольні заходи

Результат модульної контрольної роботи для студента, який не з'явився на контрольний захід, є нульовим. У такому разі, студент має можливість написати модульну контрольну роботу, але максимальний бал за неї буде дорівнювати 50% від загальної кількості балів. Повторне написання модульної контрольної роботи не допускається.

Пропущений залік не зараховується незалежно від причин пропуску; у такому випадку студент отримує запис у відомості «не з'явився» та повинен скласти іспит на додатковій сесії.

#### Оголошення результатів контрольних заходів

Результати модульної контрольної роботи вказуються на бланках для модульної контрольної роботи (завдання, які виконували студенти) з позначенням усіх помилок, коректної або некоректної відповіді, а також з коментарями, зауваженнями тощо.

Результати письмово екзамену вказуються на бланках для письмової екзаменаційної роботи (завдання, які виконували студенти) з позначенням усіх помилок, коректної або некоректної відповіді, а також з коментарями, зауваженнями тощо.

#### Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>.

#### Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>.

#### Процедура оскарження результатів контрольних заходів

Студенти мають можливість підняти будь-яке питання, яке стосується процедури проведення та/або оцінювання контрольних заходів, та очікувати, що воно буде розглянуто згідно із наперед визначеними процедурами.

Студенти мають право оскаржити результати контрольних заходів, але обов'язково аргументовано, пояснивши, з яким критерієм не погоджуються відповідно до оціночного листа та/або зауважень.

## 8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

№ з/п	Контрольний захід	Макс бал	Ваговий бал	Кіл-ть	Всього
1	Модульна контрольна робота	30	1	2	60
2	Домашні контрольні роботи	5	1	8	40
	Всього				100

Проміжна атестація студентів (далі – атестація) є календарним рубіжним контролем та проводиться двічі за семестр, на 8-му та 14-му навчальному тижнях. Для одержання першої атестації перша модульна контрольна робота має бути написана на позитивну оцінку (не менше 15ти балів з 30), та виконано перші 3 домашні контрольні роботи (домашня контрольна робота вважається виконаною, якщо правильно розв'язано хоча б 60% запропонованих задач); для одержання другої атестації друга модульна контрольна робота має бути написана на позитивну оцінку, та виконано перші 6 домашніх контрольних робіт.

Рейтингова оцінка складається з результатів роботи в семестрі.

### Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

<i>Кількість балів</i>	<i>Оцінка</i>
95-100	Відмінно
85-94	Дуже добре
75-84	Добре
65-74	Задовільно
60-64	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

### Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

**Склав:** старший викладач кафедри ММЗІ, к.ф.-м.н. Рябов Георгій Валентинович.

**Ухвалено** кафедрою математичних методів захисту інформації (протокол №6/2024 від 19.06.2024).

**Затверджено** Методичною комісією ФТІ (протокол №6/2024 від 27.06.2024).