



# ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Галузь знань	11 Математика і статистика
Спеціальність	113 Прикладна математика
Освітня програма	Математичні методи криптографічного захисту інформації
Статус дисципліни	Вибіркова
Форма навчання	Очна (денна)
Рік підготовки, семестр	4 курс, осінній семестр
Обсяг дисципліни	Загальна кількість: 120 годин/4 кредити Лекційних занять: 36 год Практичних занять: 36 год Самостійна робота студентів: 48 год
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Залік / МКР, поточний контроль
Розклад занять	<a href="http://rozklad.kpi.ua">http://rozklad.kpi.ua</a>
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: кандидат фізико-математичних наук, старший викладач Рябов Георгій Валентинович, <a href="mailto:ryabov.george@gmail.com">ryabov.george@gmail.com</a> Практичні: кандидат фізико-математичних наук, старший викладач Рябов Георгій Валентинович, <a href="mailto:ryabov.george@gmail.com">ryabov.george@gmail.com</a>
Розміщення курсу	<a href="https://classroom.google.com/c/NTI3Njg0MDY1NjA3?cjc=d4s2ygf">https://classroom.google.com/c/NTI3Njg0MDY1NjA3?cjc=d4s2ygf</a>

### Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Теорія випадкових процесів вивчає ймовірнісні закономірності поведінки об'єктів, які мають стохастичну природу, або знаходяться у випадковому середовищі. Необхідність вивчати такі об'єкти природним чином виникає в задачах захисту інформації, розпізнавання образів, квантової фізики, фінансової математики тощо.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають продемонструвати такі компетентності та програмні результати навчання за освітньою програмою:

#### Загальні компетентності

ЗК 1 – Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

ЗК 6 – Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

## Фахові компетентності

ФК 1 – Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.

ФК 2 – Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.

ФК 13 – Здатність зрозуміти постановку завдання, сформульовану мовою певної предметної галузі, здійснювати пошук та збір необхідних вихідних даних.

## Програмні результати навчання

РН 2 – Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.

РН 14 – Виявляти здатність до самонавчання та продовження професійного розвитку.

РН 15 – Уміти організувати власну діяльність та одержувати результат у рамках обмеженого часу.

### 2. Пререквізити та постреквізити дисципліни

*Для успішного засвоєння дисципліни “Випадкові процеси” студент повинен вміти вільно застосовувати результати, викладені в дисциплінах “Теорія ймовірностей”, “Математична статистика” та “Функціональний аналіз”. На результатах навчання з дисципліни “Випадкові процеси” базується дисципліна “Аналіз даних”.*

### 3. Зміст навчальної дисципліни

#### Розділ 1. Випадкові процеси, характеристики розподілів випадкових процесів

Тема 1.1. Основні характеристики розподілів випадкових процесів

Тема 1.2. Теорема Колмогорова про існування випадкового процесу

Тема 1.3. Гаусівські процеси

Тема 1.4. Регулярність траєкторій випадкового процесу

#### Розділ 2. L2 теорія

Тема 2.1. Стаціонарні випадкові процеси

Тема 2.2. Спектральне зображення стаціонарного процесу

Тема 2.3. Сингулярні та регулярні стаціонарні послідовності

Тема 2.4. Задача прогнозу для стаціонарних послідовностей

#### Розділ 3. Ланцюги Маркова

Тема 3.1. Класифікація станів ланцюга Маркова

Тема 3.2. Інваріантний розподіл ланцюга Маркова

Тема 3.3. Ергодичні теореми

### 4. Навчальні матеріали та ресурси

Базові:

1. А.В. Скороход. Лекції з теорії випадкових процесів. - К.: Либідь, 1990, 167 с.

[https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share_link)

2. Я.І. Єлейко, Б.І. Копитко, Б.М. Тріщ. Теорія ймовірностей. Теореми, приклади і задачі. - Л.: ЛНУ імені Івана Франка, 2009, 391 с.

[https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share_link)

3. А.А. Дороговцев, І.І. Ніщенко. Випадкові процеси: збірник задач до проведення практичних занять для студентів напрямку підготовки 6.040301 “Прикладна математика”. - К.: НТУУ “КПІ”, 2012, 84 с.

[https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share_link)

*Додаткові:*

4. R. Durrett. Probability. Theory and Examples. Fourth Edition. - Cambridge University Press, 428 pp.

[https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share_link)

5. D. Gusak, A. Kukush, A. Kulik, Yu. Mishura, A. Pilipenko. Theory of Stochastic Processes. With Applications to Financial Mathematics and Risk Theory. - Springer, 2010, 375 pp.

[https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share_link)

6. A. Shiryaev. Probability - 1. - Springer, 2016, 486 pp.

[https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share_link)

7. A. Shiryaev. Probability - 2. - Springer, 2019, 348 pp.

[https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share_link)

8. A. Shiryaev. Problems in Probability. - Springer, 2012, 427 pp.

[https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1d9JcEhgagwEEX8dqJlFrhiSKuFnqys9H?usp=share_link)

## - Навчальний контент

### 5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

*Навчання здійснюється на основі студентоцентрованого підходу та стратегії взаємодії викладача та студента для засвоєння студентами матеріалу та розвитку у них практичних навичок. Для лекційних занять використовуються пояснювально-ілюстративний метод. Для проведення практичних занять використовується метод проблемного викладу, при якому викладач показує спосіб рішення поставленого завдання, а студенти стають свідками й співучасниками наукового пошуку.*

#### Лекційні заняття

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
1.	Тема 1.1. Основні характеристики розподілів випадкових процесів Основні питання: Визначення випадкового процесу, функція середнього та коваріаційна функція, скінченновимірні розподіли.
2.	Тема 1.1. Основні характеристики розподілів випадкових процесів Основні питання: Приклади випадкових процесів. Процеси Вінера та Пуассона, їх скінченновимірні розподіли.
3.	Тема 1.2. Теорема Колмогорова про існування випадкового процесу

	Основні питання: Теорема Колмогорова про існування випадкового процесу. Алгебра циліндричних множин.
4.	Тема 1.3. Гаусівські процеси Основні питання: Гаусівські процеси. Узгодженість скінченновимірних розподілів в термінах характеристичних функцій. Коваріаційна функція гаусівського процесу.
5.	Тема 1.4. Регулярність траєкторій випадкового процесу Основні питання: Регулярність випадкового процесу як функції від параметру. Стохастично неперервні процеси. Модифікація випадкового процесу. Вимірна модифікація стохастично неперервного процесу.
6.	Тема 1.4. Регулярність траєкторій випадкового процесу Основні питання: Існування неперервної модифікації випадкового процесу. Достатня умова Колмогорова.
7.	МКР 1
8.	Тема 2.1. Стаціонарні випадкові процеси Основні питання: Неперервні, диференційовні, інтегровні в середньо квадратичному випадкові процеси.
9.	Тема 2.1. Стаціонарні випадкові процеси Основні питання: Стаціонарність у вузькому та в широкому сенсах. Стаціонарність гаусівських процесів. Теореми Бохнера та Герглотца.
10.	Тема 2.2. Спектральне зображення стаціонарного процесу Основні питання: Процеси з ортогональними приростами. Стохастичний інтеграл по процесу з ортогональними приростами. Спектральне зображення стаціонарного процесу.
11.	Тема 2.2. Спектральне зображення стаціонарного процесу Основні питання: Перетворення спектральної щільності стаціонарного процесу при операціях диференціювання та згортки.
12.	Тема 2.3. Сингулярні та регулярні стаціонарні послідовності Основні питання: Простори лінійних оцінок. Сингулярні послідовності. Критерій сингулярності. Регулярні послідовності. Білий шум.
13.	Тема 2.3. Сингулярні та регулярні стаціонарні послідовності Основні питання: Оновлюючий білий шум для регулярної послідовності. Структура регулярної послідовності.
14.	Тема 2.4. Задача прогнозу для стаціонарних послідовностей Основні питання: Задача прогнозу для регулярної послідовності. Існування та єдиність розкладу Вольда. Задача прогнозу для стаціонарної послідовності
15.	МКР 2
16.	Тема 3.1. Класифікація станів ланцюга Маркова Основні питання: Визначення ланцюга Маркова. Скінченновимірні розподіли ланцюга Маркова. Стани, що сполучаються, суттєві стани. Період стану. Рекурентні і нерекурентні стани. Додатні і нульові стани.
17.	Тема 3.2. Інваріантний розподіл ланцюга Маркова Основні питання: Ергодичні ланцюги Маркова. Збіжність за Абелем перехідних ймовірностей. Існування і єдиність інваріантного розподілу у випадку коли всі стани сполучаються і додатні.
18.	Тема 3.3. Ергодичні теореми Основні питання: Збіжність перехідних ймовірностей для аперіодичних станів, що сполучаються. Індивідуальна ергодична теорема.

#### Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань
-------	---

1.	<p>Основні поняття теорії ймовірностей</p> <p>Основні питання: Функція розподілу випадкової величини. Обчислення ймовірностей, пов'язаних з випадковими векторами. Обчислення математичних сподівань та коваріаційних матриць випадкових векторів. Незалежність випадкових величин. Закон великих чисел та центральна гранична теорема.</p>
2.	<p>Характеристики випадкового процесу</p> <p>Основні питання: Скінченновимірні розподіли випадкового процесу. Функція математичного сподівання та коваріаційна функція.</p>
3.	<p>Процеси Пуассона</p> <p>Основні питання: Скінченновимірні розподіли процесу Пуассона. Властивості траєкторій процесу Пуассона. Інтенсивність процесу Пуассона.</p>
4.	<p>Гаусові процеси</p> <p>Основні питання: Щільність скінченновимірних розподілів гаусівських процесів. Властивості коваріаційної функції.</p>
5.	<p>Вінерів процес</p> <p>Основні питання: Скінченновимірні розподіли вінерівського процесу. Незалежність приростів та властивість самоподібності вінерівського процесу. Лінійні перетворення вінерівського процесу.</p>
6.	<p>Стохастична неперервність випадкових процесів</p> <p>Основні питання: Стохастично неперервні процеси та їх властивості.</p>
7.	<p>Неперервна модифікація випадкового процесу</p> <p>Основні питання: Достатня умова Колмогорова існування неперервної модифікації.</p>
8.	<p>L2 теорія</p> <p>Основні питання: Неперервність, диференціювання та інтегрування в середньому квадратичному. Умови неперервності та неперервної диференційовності в термінах функції математичного сподівання та коваріаційної функції.</p>
9.	<p>Стаціонарні випадкові процеси</p> <p>Основні питання: Спектральна функція та спектральна щільність стаціонарного в широкому сенсі процесу.</p>
10.	<p>Лінійні перетворення стаціонарних процесів</p> <p>Основні питання: Перетворення спектральної функції стаціонарного процесу при дії на нього диференціального або інтегрального оператора.</p>
11.	<p>Спектральне зображення стаціонарного процесу</p> <p>Основні питання: Процес з ортогональними приростами і стохастичний інтеграл. Спектральне зображення стаціонарного в широкому сенсі процесу.</p>
12.	<p>Стаціонарні випадкові послідовності</p> <p>Основні питання: Теорема Герглотца. Обчислення спектральної функції стаціонарної послідовності. Перетворення спектральної функції стаціонарної послідовності при дії на неї операції згортки.</p>
13.	<p>Регулярні та сингулярні стаціонарні послідовності</p> <p>Основні питання: Простори лінійних оцінок. Регулярні і сингулярні послідовності. Критерій Колмогорова регулярності послідовності зі спектральною щільністю.</p>
14.	<p>Розклад Вольда і задача прогнозу</p> <p>Основні питання: Знаходження розкладу Вольда стаціонарної послідовності. Задача прогнозу для стаціонарної послідовності.</p>
15.	<p>Класифікація станів ланцюга Маркова</p> <p>Основні питання: Скінченновимірні розподіли ланцюга Маркова. Істотні та неістотні стани ланцюга Маркова. Стани, що сполучаються.</p>
16.	<p>Періоди станів ланцюга Маркова</p> <p>Основні питання: Обчислення періодів станів ланцюга Маркова. Рекурентні та нерекурентні стани. Додатні та нульові стани.</p>

17.	Інваріантний розподіл ланцюга Маркова Основні питання: Обчислення інваріантного розподілу ланцюга Маркова. Збіжність перехідних ймовірностей ланцюга Маркова.
18.	Ергодичні теореми для ланцюгів Маркова Основні питання: Єдиність інваріантного розподілу ланцюга Маркова та збіжність до нього перехідних ймовірностей. Індивідуальна ергодична теорема.

## 6. Самостійна робота студента

Студент повинен завчасно готуватись до лекцій та лабораторних занять. Перед лекціями необхідно повторити теоретичний матеріал, наданий у попередніх лекціях. Перед практичними заняттями необхідно повторити відповідний теоретичний матеріал.

### Самостійна робота студента

№ з/п	Вид самостійної роботи	Кількість годин СРС
1.	Виконання домашніх контрольних робіт	27
2.	Підготовка до практичних занять	12
3.	Підготовка до МКР	9
	<b>Загалом</b>	<b>48</b>

## Політика та контроль

### 7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

#### Відвідування занять

Відповідно до Наказу по КПІ 1-273 від 14.09.2020 р. заборонено оцінювати присутність або відсутність здобувача на аудиторному занятті. Матеріал занять, які були з тих чи інших причин пропущені, необхідно опанувати самостійно. У будь-якому випадку студентам рекомендується відвідувати усі види занять, оскільки на них викладається теоретичний матеріал та розвиваються навички, необхідні для виконання домашніх завдань, контрольних та розрахункових робіт. Система оцінювання орієнтована на отримання балів за активність студента, а також виконання завдань, що розвивають практичні уміння та навички.

#### Правила захисту домашніх контрольних робіт

Виконання домашніх контрольних робіт є обов'язковим. Ревізія виконаних домашніх робіт також необхідна для підготовки до модульних контрольних робіт. В кожній домашній роботі студентам пропонується розв'язати набір типових задач з теми відповідного практичного заняття. При розв'язанні задач необхідно обґрунтовувати кожний крок розв'язання, спираючись на теоретичні положення курсу. У випадку застосування тієї чи іншої теореми необхідно ретельно перевірити виконання всіх умов теореми. Кожна задача в домашній контрольній роботі оцінюється в кількості балів, що є пропорційною до кількості задач в домашній контрольній роботі. Якщо при розв'язанні задачі обґрунтовано всі необхідні кроки, але допущено помилки при

обчисленнях, вона оцінюється у 80% від максимально можливої кількості балів. Якщо при розв'язанні задачі не перевірено умов використаних тверджень, вона оцінюється в 60% від максимально можливої кількості балів. Якщо при розв'язанні задачі наведено хибні твердження, вона оцінюється в 0% від максимально можливої кількості балів.

### **Правила захисту модульних контрольних робіт**

Кожне питання в модульній контрольній роботі оцінюється в кількість балів, що є пропорційною до кількості питань в модульній контрольній роботі. При відповіді на теоретичні питання модульної контрольної роботи всі теореми мають бути сформульовані з усіма умовами, за яких ці теореми мають місце. Якщо при формулюванні теорема пропущена одна з необхідних умов, відповідне питання оцінюється в 0% від максимально можливої кількості балів. Сформульовані визначення мають бути підкріплені прикладами. Якщо визначення сформульоване без прикладів, відповідне питання оцінюється в 50% від максимально можливої кількості балів. Якщо при розв'язанні задачі обґрунтовано всі необхідні кроки, але допущено помилки при обчисленнях, вона оцінюється у 80% від максимально можливої кількості балів. Якщо при розв'язанні задачі не перевірено умов використаних тверджень, вона оцінюється в 60% від максимально можливої кількості балів. Якщо при розв'язанні задачі наведено хибні твердження, вона оцінюється в 0% від максимально можливої кількості балів.

### **Пропущені контрольні заходи**

Результат модульної контрольної роботи для студента, який не з'явився на контрольний захід, є нульовим. Повторне написання модульної контрольної роботи не допускається. Пропущене написання додаткової контрольної роботи не зараховується; у такому випадку студент отримує запис у відомості «не з'явився» та повинен написати додаткову контрольну роботу на додатковій сесії.

### **Академічна доброчесність**

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>.

### **Норми етичної поведінки**

Норми етичної поведінки студентів і викладачів визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>.

### **Процедура оскарження результатів контрольних заходів**

Студенти мають можливість підняти будь-яке питання, яке стосується процедури проведення та/або оцінювання контрольних заходів, та очікувати, що воно буде розглянуто згідно із наперед визначеними процедурами. Студенти мають право оскаржити результати контрольних заходів, але обов'язково аргументовано, пояснивши, з яким критерієм не погоджуються відповідно до оціночного листа та/або зауважень.

## 8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

### Поточний контроль:

*Модульні контрольні роботи, домашні контрольні роботи.*

### Календарний контроль:

*Календарний контроль проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу. Календарний контроль базується на поточній рейтинговій оцінці. Умовою позитивної атестації є значення поточного рейтингу студента не менше 50% від максимально можливого на час атестації. Бал, необхідний для отримання позитивного календарного контролю доноситься до студентів викладачем не пізніше ніж за 2 тижні до початку календарного контролю.*

### Семестровий контроль: залік

*Загальна рейтингова оцінка студента після завершення семестру складається з балів, отриманих за:*

№	Контрольний захід	Бал	Кількість	Всього
1	Модульна контрольна робота	23	2	46
2	Домашня контрольна робота	3	18	54
	Всього			100

*Здобувачі, що мають рейтинг  $\geq 60$  балів отримують залік без додаткових випробувань. Зі здобувачами, які мають рейтингову оцінку менше 60 балів, а також з тими, хто бажає підвищити свою рейтингову оцінку, на останньому за розкладом занятті з дисципліни в семестрі викладач проводить семестровий контроль у вигляді додаткової контрольної роботи.*

*Попередній рейтинг здобувача у цьому випадку скасовується (за винятком балів за домашні контрольні роботи). Рейтингову оцінку визначають у цьому випадку як суму балів за індивідуальні семестрові завдання, які складаються з балів за домашні контрольні роботи. Бали, отримані за виконання модульних контрольних робіт не входять до переліку індивідуальних семестрових завдань. Розмір шкали оцінювання додаткової контрольної роботи зменшується зі 100 балів до 46 балів.*

*Це формує відповідальне ставлення здобувача до прийняття рішення про виконання додаткової контрольної роботи, змушує його критично оцінити рівень своєї підготовки та ретельно готуватися до додаткової контрольної;*

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Кількість балів	Оцінка
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено



**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено** старшим викладачем кафедри математичних методів захисту інформації, кандидатом фізико-математичних наук Рябовим Георгієм Валентиновичем.

**Ухвалено** кафедрою ММЗІ (протокол № 2 від 16.06.2022)

**Погоджено** Методичною комісією навчально-наукового фізико-технічного інституту (протокол № 6 від 30.06.2022)